

## Lista 9 - Produto Vetorial e suas Aplicações

**Exercício 1.** Calcule o produto vetorial  $u \times v$  para:

- a)  $u = (5, 4, 3)$  e  $v = (1, 0, 1)$ ;
- b)  $u = (3, 1, 2)$  e  $v = (-2, 2, 5)$ ;
- c)  $u = (1, -1, 1)$  e  $v = (2, -3, 4)$ ;
- d)  $u = (1, -2, -2)$  e  $v = (2, 0, -1)$ ;
- e)  $u = (2, 1, -1)$  e  $v = (1, -1, 3)$ .

**Exercício 2.** Se  $u = (3, -1, -2)$ ,  $v = (2, 4, -1)$  e  $w = (-1, 0, 1)$ , determine:

- a)  $|u \times v|$ ;
- b)  $(2v) \times (3v)$ ;
- c)  $(u \times w) + (w \times u)$ ;
- d)  $(u \times v) \times (v \times u)$ ;
- e)  $(u - v) \times w$ ;
- f)  $(u \times v) \times w$ ;
- g)  $u \times (v \times w)$ ;
- h)  $u \times (v + w)$ ;
- i)  $u \times v + u \times w$ ;
- j)  $\langle u \times v, v \rangle$ ;
- k)  $\langle u \times v, w \rangle$ ;
- l)  $\langle u, v \times w \rangle$ .

**Exercício 3.** Determine o vetor  $w \in \mathbb{R}^3$  tal que  $w$  seja ortogonal ao eixo  $y$  e  $u = w \times v$ , onde  $u = (1, 1, -1)$  e  $v = (2, -1, 1)$ .

**Exercício 4.** Determine um vetor que seja ortogonal a ambos  $u = (1, -1, 4)$  e  $v = (3, 2, -2)$ .

**Exercício 5.** Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores  $u = (1, -1, 1)$  e  $v = (2, -3, 4)$ . Calcule também a altura relativa a base definida pelo vetor  $u$ .

**Exercício 6.** Determine a distância do ponto  $P(5, 1, 2)$  a reta  $r$  que passa pelos pontos  $A(3, 1, 3)$  e  $B(4, -1, 1)$ .

**Exercício 7.** Determine o valor de  $a$  para que a área do paralelogramo determinado por  $u = (2, 1, -1)$  e  $v = (1, -1, a)$  seja  $\sqrt{62}$ .

**Exercício 8.** Dados os pontos  $A(2, 1, 1)$ ,  $B(3, -1, 0)$  e  $C(4, 2, -2)$ , determine a área do triângulo  $ABC$  e a altura relativa ao vértice  $C$ .

**Exercício 9.** Encontre um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos  $P, Q$  e  $R$ :

- a)  $P(3, 0, 0)$ ,  $Q(0, 3, 0)$  e  $R(0, 0, 2)$ ;
- b)  $P(2, 3, 0)$ ,  $Q(0, 2, 1)$  e  $R(2, 0, 2)$ .

**Exercício 10.** Determine  $z$  sabendo que  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  e  $C(0, 0, z)$  são vértices de um triângulo de área 6.

**Definição 1.** Três vetores  $u, v$  e  $w$  são co-planares, ou seja, pertencem ao mesmo plano, se, e somente se, vale a equação  $\langle u, v \times w \rangle = 0$ .

**Exercício 11.** Verifique que os vetores  $u = (2, -1, 1)$ ,  $v = (1, 0, -1)$  e  $w = (2, -1, 4)$  são co-planares.

**Exercício 12.** Qual deve ser o valor de  $m$  para que os vetores  $u = (2, m, 0)$ ,  $v = (1, -1, 2)$  e  $w = (-1, 3, -1)$  sejam co-planares?

**Exercício 13.** Verifique que os pontos  $A(1, 2, 4)$ ,  $B(-1, 0, 2)$ ,  $C(0, 2, 2)$  e  $D(-2, 1, 3)$  estão no mesmo plano.

**Exercício 14.** Qual o volume do cubo determinado pelos vetores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ ?

**Exercício 15.** Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $u = (3, -1, 4)$ ,  $v = (2, 0, 1)$  e  $w = (-2, 1, 5)$ .

**Exercício 16.** Calcule o valor de  $m$  para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $v_1 = (0, -1, 2)$ ,  $v_2 = (-4, 2, -1)$  e  $v_3 = (3, m, -2)$  seja 33.

## RESPOSTAS

Ex. 1: a)  $(4, -2, -4)$ , b)  $(1, -19, 8)$ , c)  $(-1, -2, -1)$ , d)  $(2, -3, 4)$ , e)  $(2, -7, -3)$ .

Ex. 2: a) 0, b)  $(0, 0, 0)$ , c)  $(0, 0, 0)$ , d)  $(0, 0, 0)$ , e)  $(-5, 0, -5)$ , f)  $(-1, -23, -1)$ ,  
g)  $(-6, -20, 1)$ , h)  $(8, -2, 13)$ , i)  $(8, -2, 13)$ , j) 0, k) 5, l) 5.

Ex. 3:  $w = (1, 0, 1)$ .

Ex. 4:  $(10, -10, 5)$  ou qualquer múltiplo desse vetor.

Ex. 5:  $A = \sqrt{6}$  u.a.,  $h = \sqrt{2}$  u.c.

Ex. 6: Distância:  $\frac{\sqrt{29}}{3}$  u.c.

Ex. 7:  $a = 3$  ou  $a = \frac{-17}{5}$ .

Ex. 8:  $A = \frac{5}{2}\sqrt{3}$  u.a. e  $h = \frac{5}{2}\sqrt{2}$  u.c.

Ex. 9: a)  $(2, 2, 3)$ , b)  $(1, 4, 6)$ .

Ex. 10: 4 ou -4.

Ex. 12:  $m = -10$ .

Ex. 14:  $V = 1$ .

Ex. 15:  $V = 17$ .

Ex. 16:  $m = 4$  ou  $m = -\frac{17}{4}$ .